11-01

Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике

11 класс

Милая Надежда

11.1 Найдите $x^3 + y^3$, если известно, что $x + y = 5$ и $x + y + x^2y + xy^2 = 24$.

11.2 Сколько единиц в десятичной записи числа

$$9 + 99 + 999 + \cdots + 9\ldots9$$

(последнее слагаемое записано 2019-ю девятками)?

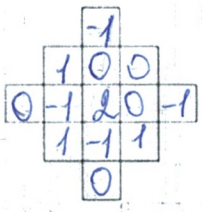
11.3 Куб и правильный тетраэдр имеют одинаковые объемы. Найдите отношение площадей их поверхностей.

11.4 Для углов треугольника ABC выполняется равенство

$$\sin\angle A = 2\sin\angle B\cos\angle C.$$

Докажите, что треугольник является равнобедренным.

11.5 Расставьте числа в клетках изображенной на рисунке фигуры так, чтобы в любом прямоугольнике из трех клеток сумма чисел была равна 1, и сумма всех чисел была равна 1. (Достаточно привести один пример.)



+7 б.

Задание №11.1

Найти: x^3+y^3

Дано: $x+y=5$

$x+y+x^2y+xy^2=24$

$x+y+xy(x+y)=24$

$(x+y)+xy(x+y)=24$

$(\overset{5}{x+y})(xy+1)=24$

$5(xy+1)=24$

$xy+1=4,8$

$xy=3,8.$

$(x+y)^3=x^3+y^3+3x^2y+3xy^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^3+y^3=(x+y)^3-(3x^2y+3xy^2)=$

$=(x+y)^3-3xy(x+y)=$

$=5^3-3\cdot 3,8\cdot 5=125-57=68.$

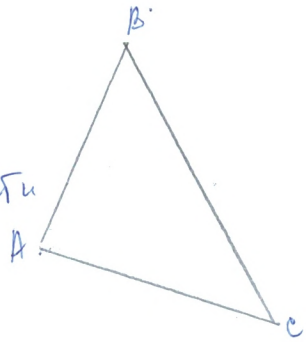
Ответ: $x^3+y^3=68$

+ 7б

Задание №11.4

Дано:
$\triangle ABC$
$\sin\angle A=2\sin\angle B\cos\angle C$

Доказать:
$\triangle ABC$ - равнобедренный
~~$\sin(\alpha)=2\cos\alpha\sin\alpha$~~.



Предположим, что $\triangle ABC$ - прямоугольный и $\angle A=90^\circ$, а $\angle B=\angle C=45^\circ$ равнобедренный.

т.к. $\sin\angle A=2\sin\angle B\cos\angle C$

$\sin 90^\circ=2\sin 45^\circ\cos 45^\circ$

$1=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

$1=1$

Следовательно: $\angle A=90^\circ$; $\angle B=\angle C=45^\circ$. $A=B=C \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ABC$ - равнобедренный, прямоугольный

ч.т.д.

+ 7б

Задание №11.2

$$\begin{array}{r} +99 \\ 9 \\ \hline 198 \end{array} \quad \begin{array}{r} +999 \\ 198 \\ \hline 1197 \end{array} \quad \begin{array}{r} +9999 \\ 1197 \\ \hline 11196 \end{array} \quad \begin{array}{r} +99999 \\ 11196 \\ \hline 111195 \end{array} \Rightarrow \overline{1111194} \Rightarrow \overline{11111193} \Rightarrow \ldots$$

Из выражений выше можно сделать вывод, что кол-во единиц в получившимся числе на 1 меньше числа, состоящего из 9. Т.е., если число состоит из трех девяток, то кол-во единиц = 2.

Следовательно кол-во единиц в десятичной записи числа, где последнее слагаемое содержит 2019 девяток будет равно 2018

Ответ: 2018 единиц.

± 3б

Задание №11.3

11-01

- a - сторона куба
- b - сторона тетраэдра

$V_к = b^3$ $\quad V_т = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

$S_к = 6b^2$ $\quad S_т = a^2\sqrt{3}$

$V_к = V_т$

$b^3 = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

$b = \sqrt[3]{\frac{a^3\sqrt{2}}{12}}$

$b = \frac{a\sqrt[3]{\sqrt[5]{2}}}{\sqrt[3]{12}}$

$S_к = 6 \cdot \left(\frac{a\sqrt[5]{2}}{\sqrt[3]{12}}\right)^2$

$S_к = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt[3]{2}}{\sqrt{12}}$

$S_к = \frac{\cancel{6} \cdot a^2\sqrt[3]{2}}{2\sqrt{3}}$

$S_к = \frac{a^2\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}$

$S_т = a^2\sqrt{3}$

$b^3 = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

$a^3 = \frac{b^3 \cdot 12}{\sqrt{2}}$

$a = \frac{b \cdot \sqrt[3]{12}}{\sqrt[5]{2}}$

$S_т = \frac{b^2 \cdot \sqrt{12}}{\sqrt[3]{2}} \cdot \sqrt{3}$

$S_т = \frac{b^2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2}}$

$S_т = \frac{b^2 \cdot 6}{\sqrt[3]{2}}$

$\frac{S_к}{S_т} = \frac{a^2 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2}}{\sqrt{3} \cdot 6} = \frac{a^2 \cdot \cancel{2}}{\sqrt{3} \cdot \cancel{6}} = \frac{a^2}{3\sqrt{3}}$

Ответ: $\frac{S_к}{S_т} = \frac{a^2}{3\sqrt{3}}$ $\quad \pm$ 2б.

~~19б.~~

26б