

Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике

10 класс

10.1 Вычислите:

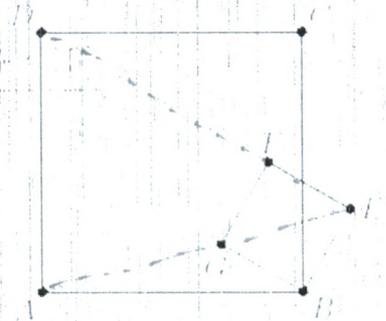
$$\frac{(2008 \cdot 2028 + 100)(1998 \cdot 2038 + 400)}{2018^4}$$

10.2 Для $0 < y < x < 1$ докажите, что

$$\frac{x - y}{1 - xy} < 1.$$

10.3 В каждой вершине куба написано число 1 или число -1 . На каждой грани куба написана сумма четырёх чисел, написанных в вершинах этой грани. Может ли оказаться, что все числа, написанные на гранях, различны?

10.4 Квадраты $ABCD$ и $BEFG$ расположены так, как показано на рисунке. Оказалось, что точки A , G и E лежат на одной прямой. Докажите, что тогда точки D , F и E также лежат на одной прямой.



10.5 Двое по очереди проводят на плоскости прямые, причем дважды одну прямую проводить нельзя. Выигрывает тот, после хода которого число кусков, на которые плоскость разбита проведенными прямыми, впервые разделится на 5. Кто выигрывает при правильной игре: тот, кто ходит первым, или его партнер, и как ему для этого надо играть?

10.1.

Решение:

$$\frac{(2008 \cdot 2028 + 100)(1998 \cdot 2038 + 400)}{2018^4} = \frac{(4072224 + 100)(4071924 + 400)}{2018^4} =$$

$$= \frac{4072324 \cdot 4072324}{2018^4} = \frac{4072324^2}{2018^4} = \frac{4072324^2}{4072324^2} = 1$$

Ответ: 1.

25

10.4.

Доказательство:

Рассмотрим $\triangle AGB$ и $\triangle AFG$:

AB - общая сторона

GB = GF как равные стороны $\square FEGB$ $\angle AGB = 135^\circ$, так как смежные углы $\angle BGE$ и $\angle FGE$ равны по 45° $\triangle AGB = \triangle AFG$ по I признаку,значит $AB = AD = AF$ $\angle GAB = \angle GAF = x$ $\angle GFA = 180^\circ - \angle AGF - \angle GAF = 45^\circ - x$ $\triangle ADF$ - равнобедренный, т.к. $DF = AF$ $\angle DAF = 90^\circ - 2x$ $\angle DFA = \frac{1}{2}(90^\circ - 2x) = 45^\circ$, значит $\angle DFG = \angle GFA + \angle DFA = (45^\circ - x) + (45^\circ + x) = 90^\circ$ $\angle DFG + \angle EFG = 180^\circ \Rightarrow$

точки D, F, E лежат на одной прямой.

45

10.5.

Решение:

I ход второй - провел прямую, параллельную первой прямой, которую провел I партнер.

II ход первый - провел прямую, параллельную двум прямым и т.

10-07.

скорость будет поделена на 4 части.

10-07

Второй - проводит прямую параллельную 3 прямой и поделит, т.к. плоскость будет поделена на 5 частей а 5 делится на 5.

2 случай: II ход первый - проводит прямую, пересекающую 2 прямые и делит плоскость на 6 частей.

Второй - проводит прямую, пересекающую три прямые и поделит, потому что плоскость поделена на 10 частей, а 10 делится на 5.

Ответ: выигрывает второй партнер; выигрывает в обоих случаях.

$$\begin{array}{r} + 75 \\ \hline 215 \end{array}$$